

## TECHNICAL NOTES

### A propos des conditions aux limites de 4ème et 5ème espèces

A. DEGIOVANNI et J. C. BATSALÉ

URA CNRS 875 LEMTA ENSEM, 2 Avenue de la Forêt de Haye, 54516, Vandoeuvre-Les-Nancy, Cedex, France

(Reçu 3 juin 1993 et sous forme finale 7 octobre 1993)

#### 1. INTRODUCTION

DANS UN ouvrage récent, Beck *et al.* [1] reprennent deux types de conditions aux limites déjà introduites par Carslaw et Jaeger [2] nomenclaturées conditions de 4ème espèce et de 5ème espèce correspondant à un film dont on néglige la 'résistance thermique' (les propriétés thermophysiques sont supposées indépendantes du temps et de la température) :

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = f(r_i, t) - (\rho c e)_f \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + hT = f(r_i, t) - (\rho c e)_f \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2)$$

Comme le disent ces auteurs, ces conditions ne sont en fait utilisables que dans le cas de transfert de chaleur unidirectionnel. En effet, pour négliger la 'résistance thermique', tout en conservant la 'capacité thermique', il est nécessaire que la conductivité thermique du film soit suffisamment grande devant la conductivité du milieu, on ne peut plus alors négliger les transferts dans le plan de la surface si des gradients de température existent.

#### 2. CONDITIONS AUX LIMITES DE 6ÈME ET 7ÈME ESPÈCE

Dans ce cas, nous proposons de modifier les conditions aux limites précédentes. Écrivons l'équation de la chaleur dans le film (à titre d'exemple nous nous plaçons dans un système de coordonnées cartésiennes et on suppose que le film est isotrope ; la généralisation à tout système de coordonnées ou à un film anisotrope est immédiate) (Fig. 1) :

$$\lambda_f \left( \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_f}{\partial z^2} \right) = \rho c_f \frac{\partial T_f}{\partial t} \quad (3)$$

ainsi que les conditions aux limites sur le film en  $z = 0$  et  $z = e$  :

$$-\lambda_f \frac{\partial T_f}{\partial z} = h(T_f - T_{ext}) + g(x, y, t) \quad \text{en } z = e \quad (4)$$

$$-\lambda_f \frac{\partial T_f}{\partial z} = -\lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial z} \quad (5)$$

$$T_f = T_m \quad (6)$$

(la condition en  $z = 0$  traduit un contact parfait entre le milieu et le film).

Introduisons la température moyenne dans l'épaisseur du film :

$$\bar{T}_f = \frac{1}{e} \int_0^e T_f dz \quad (7)$$

et intégrons l'équation (3) entre 0 et  $e$  sur  $z$ ; soit :

$$\lambda_f \left( \frac{1}{e} \left[ \frac{\partial T_f}{\partial z} \right]_0^e + \frac{\partial^2 \bar{T}_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}_f}{\partial y^2} \right) = \rho c_f \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial t} \quad (8)$$

En utilisant les conditions (4) et (5)

$$-\frac{h}{e} ((T_f)_e - T_{ext}) - \frac{1}{e} g(x, y, t) - \frac{\lambda_m}{e} \frac{\partial T_m}{\partial z} + \lambda_f \frac{\partial^2 \bar{T}_f}{\partial x^2} + \lambda_f \frac{\partial^2 \bar{T}_f}{\partial y^2} = \rho c_f \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial t} \quad (9)$$

En utilisant l'hypothèse du film mince et bon conducteur et la condition (6), on écrit :

$$\bar{T}_f = (T_f)_e = (T_f)_0 = (T_m)_0.$$

La condition (9) devient :

$$-\frac{h}{e} (T_m - T_{ext}) - \frac{1}{e} g(x, y, t) - \frac{\lambda_m}{e} \frac{\partial T_m}{\partial z} + \lambda_f \frac{\partial^2 T_m}{\partial x^2} + \lambda_f \frac{\partial^2 T_m}{\partial y^2} = \rho c_f \frac{\partial T_m}{\partial t} \quad (10)$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$+\lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial z} + hT_m = f(x, y, t) - \rho c_f e \frac{\partial T_m}{\partial t} + \lambda_f e \left( \frac{\partial^2 T_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_m}{\partial y^2} \right) \quad (\text{avec } f = hT_{ext} - g). \quad (11)$$

Si on compare la relation (11) à la relation (2), on voit apparaître un terme supplémentaire prenant en compte les échanges dans le plan  $(x, y)$ ; la relation (11) (que l'on pourrait appeler condition de 6ème espèce) s'utilise de la même façon que les autres conditions aux limites.

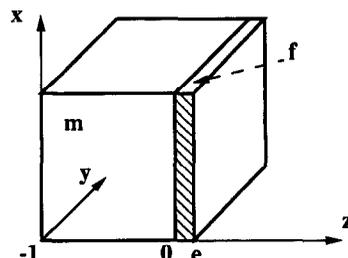


FIG. 1. Bicouche Milieu-Film.

**NOMENCLATURE**

<i>a</i>	diffusivité thermique	$\lambda^*$	conductivité thermique réduite
<i>b*</i>	rayon réduit du disque dans lequel est imposé le flux d'excitation	$\lambda$	conductivité thermique
<i>b</i>	rayon du disque dans lequel est imposé le flux d'excitation	$\rho c^*$	chaleur volumique réduite
<i>e*</i>	épaisseur réduite	$\rho c$	chaleur volumique
<i>e</i>	épaisseur	$\phi$	transformée de Hankel de la température
<i>f, g</i>	termes sources	$\varphi$	flux de chaleur dans l'espace réel
<i>h</i>	coefficient d'échange convectif	$\psi$	transformée de Laplace-Hankel de la température.
<i>n</i>	terme de la série de Hankel		
<i>p</i>	variable de Laplace		
<i>R*</i>	rayon extérieur réduit de la plaque	<b>Indices</b>	
<i>R</i>	rayon extérieur de la plaque	1, 2, 3	solution relative au bicouche, aux conditions de 6ème espèce, aux conditions de 4ème espèce
<i>R<sub>c</sub></i>	résistance thermique de contact	1, 2	milieu 1 ou 2
<i>T</i>	température	c	contact
<i>t</i>	temps	ext	extérieur
<i>x, y, z, r</i>	coordonnées d'espace.	f	film
		m	milieu.
<b>Greek symbols</b>			
$\alpha$	fréquence spatiale de Hankel		

Il est également possible de prendre en compte une résistance de contact entre le milieu et le film ; en effet seule la condition (6) est modifiée :

$$T_m - T_f = \lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial z} R_c \quad \text{en } z = 0. \quad (12)$$

En opérant de façon similaire, on obtient la condition de 7ème espèce, que l'on peut écrire :

$$\lambda_m \frac{\partial}{\partial z} \left( (1 + hR_c) T_m + \rho c_f e R_c \frac{\partial T_m}{\partial t} - \lambda_f e R_c \left( \frac{\partial^2 T_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_m}{\partial y^2} \right) \right) + h T_m = f(x, y, t) - \rho c_f e \frac{\partial T_m}{\partial t} + \lambda_f e \left( \frac{\partial^2 T_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_m}{\partial y^2} \right). \quad (13)$$

**3. EXEMPLE D'APPLICATION**

3.1. *Position du problème*

A titre d'exemple, envisageons le cas suivant. Un disque bicouche de rayon *R*, constitué d'un isolant épais et d'un métal fin, à température uniforme nulle qui reçoit à l'instant initial une impulsion de type Dirac temporel de flux sur un disque de rayon *b* (Fig. 2) ; soit en coordonnée cylindrique le système (14) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} &= \frac{1}{a_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} &= \frac{1}{a_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} \\ \frac{\partial T_1}{\partial r} &= 0 \quad \text{en } r = R \text{ et } r = 0 \\ -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} &= \varphi(r, t) \quad \text{en } z = -e_1 \\ \frac{\partial T_2}{\partial z} &= 0 \quad \text{en } z = e_2 \\ T_1 = T_2 \text{ et } \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} &= \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} \quad \text{en } z = 0 \\ T &= 0 \quad \text{à } t = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

avec :

$$\begin{aligned} \varphi(r, t) &= q_0 \delta(t) \quad \text{pour } 0 < r < b \\ \varphi(r) &= 0 \quad \text{pour } b < r < R \end{aligned} \quad (14')$$

(*q<sub>0</sub>* : constante ;  $\delta(t)$  : distribution de Dirac).

De façon à replacer ce problème dans un cadre plus général, nous effectuons les changements de variable suivants :

$$T \rightarrow \frac{\lambda_2}{q_0 e_2} T; \quad t \rightarrow \frac{a_2}{e_2^2} t; \quad z \rightarrow \frac{z}{e_2}; \quad r \rightarrow \frac{r}{e_2}.$$

On utilise les grandeurs réduites suivantes :

$$e^* = \frac{e_1}{e_2}; \quad \lambda^* = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}; \quad \rho c^* = \frac{\rho c_1}{\rho c_2}; \quad b^* = \frac{b}{e_2}; \quad R^* = \frac{R}{e_2}.$$

Le système (14) s'écrit alors :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} &= \frac{\rho c^*}{\lambda^*} \frac{\partial T_1}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} &= \frac{\partial T_2}{\partial t} \\ \frac{\partial T_1}{\partial r} &= 0 \quad \text{en } r = R^* \text{ et } r = 0 \\ -\frac{\partial T_1}{\partial z} &= F(r, t) \quad \text{en } z = -e^* \\ \frac{\partial T_2}{\partial z} &= 0 \quad \text{en } z = 1 \\ T_1 = T_2 \text{ et } \lambda^* \frac{\partial T_1}{\partial z} &= \frac{\partial T_2}{\partial z} \quad \text{en } z = 0 \\ T &= 0 \quad \text{à } t = 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

avec :

$$\begin{aligned} F(r, t) &= \delta(t) \quad \text{pour } 0 < r < b^* \\ F(r, t) &= 0 \quad \text{pour } b^* < r < R^* \end{aligned} \quad (15')$$

( $\delta(t)$  : distribution de Dirac).

On va comparer les résultats du calcul exact (système 15) avec la condition aux limites de 6ème espèce, soit le système

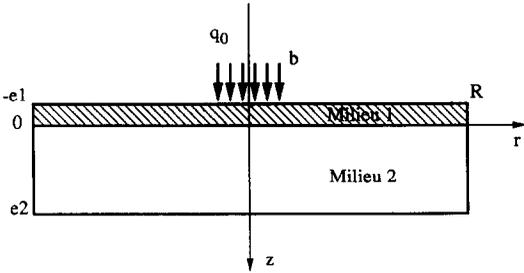


FIG. 2. Exemple d'application :  $e_1 = 0.7 \text{ mm}$  ;  $\lambda_1 = 40 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  ;  $\rho c_1 = 3.6 \times 10^6 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$  ;  $e_2 = 10 \text{ mm}$  ;  $\lambda_2 = 0.07 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  ;  $\rho c_2 = 0.12 \times 10^6 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$  ;  $R = 500 \text{ mm}$  ;  $b = 20 \text{ mm}$ . Soit en grandeurs réduites :  $e^* = 0.07$  ;  $\lambda^* = 571.4$  ;  $\rho c^* = 30$  ;  $R^* = 50$  ;  $b^* = 2$ .

(16):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} &= \frac{\partial T_2}{\partial t} \\ \frac{\partial T_2}{\partial r} &= 0 \text{ en } r = R^* \text{ et } r = 0 \\ -\frac{\partial T_2}{\partial z} &= F(r, t) + \rho c^* e^* \frac{\partial T_2}{\partial t} \\ &\quad - \lambda^* e^* \left( \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) \text{ en } z = 0 \\ \frac{\partial T_2}{\partial z} &= 0 \text{ en } z = 1 \\ T &= 0 \text{ à } t = 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

et la condition aux limites de 4ème espèce soit le système (17):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} &= \frac{\partial T_2}{\partial t} \\ \frac{\partial T_2}{\partial r} &= 0 \text{ en } r = R^* \text{ et } r = 0 \\ -\frac{\partial T_2}{\partial z} &= F(r, t) + \rho c^* e^* \frac{\partial T_2}{\partial t} \text{ en } z = 0 \\ \frac{\partial T_2}{\partial z} &= 0 \text{ en } z = 1 \\ T &= 0 \text{ à } t = 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

On constate que le système (17) est une approximation du système (16). Le terme  $(\lambda^* e^*)$  est alors considéré comme petit.

### 3.2. Comparaison des différentes approximations à l'aide d'une transformation de Laplace-Hankel

Si l'on s'intéresse par exemple aux températures en  $z = 1$ ,  $z = 0$  et  $z = -e^*$ ; il est commode de représenter les solutions après transformation de Laplace sur  $t$  et transformation de Hankel sur  $r$ , soit :

$$\Psi(\alpha, z, p) = \int_0^\infty \int_0^{R^*} T(r, z, t) J_0(\alpha r) dr \exp(-pt) dt. \quad (18)$$

Les solutions du système (15) sont alors :

$$\Psi_1(\alpha, z = 1, p) = \frac{\Phi(\alpha)}{\lambda^* \gamma_1 \text{sh}(\gamma_1 e^*) \text{ch}(\gamma_2) + \text{ch}(\gamma_1 e^*) \gamma_2 \text{sh}(\gamma_2)}$$

$$\Psi_1(\alpha, z = 0, p) = \text{ch}(\gamma_2) \Psi_1(\alpha, z = 1, p)$$

$$\Psi_1(\alpha, z = -e^*, p) = \left( \text{ch}(\gamma_1 e^*) \text{ch}(\gamma_2) + \frac{1}{\lambda^* \gamma_1} \text{sh}(\gamma_1 e^*) \gamma_2 \text{sh}(\gamma_2) \right) \Psi_1(\alpha, z = 1, p). \quad (19)$$

Les solutions du système (16) apparaissent comme le développement asymptotique au premier ordre en  $e^*$  de  $\Psi_1$  :

$$\Psi_2(\alpha, z = 1, p) = \frac{\Phi(\alpha)}{\lambda^* \gamma_1^2 e^* \text{ch}(\gamma_2) + \gamma_2 \text{sh}(\gamma_2)}$$

$$\Psi_2(\alpha, z = 0, p) = \Psi_2(\alpha, z = -e^*, p) = \text{ch}(\gamma_2) \Psi_2(\alpha, z = 1, p). \quad (20)$$

Les solutions du système (17) apparaissent comme le développement asymptotique au premier ordre en  $\lambda^* e^*$  de  $\Psi_2$  :

$$\Psi_3(\alpha, z = 1, p) = \frac{\Phi(\alpha)}{\rho c^* p e^* \text{ch}(\gamma_2) + \gamma_2 \text{sh}(\gamma_2)}$$

$$\Psi_3(\alpha, z = 0, p) = \Psi_3(\alpha, z = -e^*, p) = \text{ch}(\gamma_2) \Psi_3(\alpha, z = 1, p) \quad (21)$$

où :

$$\gamma_1^2 = \frac{\rho c^* p}{\lambda^*} + \alpha^2 \text{ et } \gamma_2^2 = p + \alpha^2$$

$$\Phi(\alpha) = \frac{b^*}{\alpha} J_1(\alpha b^*) \quad (22)$$

et  $\alpha$  solution de  $J_1(\alpha R^*) = 0$ .

Les fonctions  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$  et  $\Psi_3$  suffisent pour étudier et comparer les solutions en fonction des termes adimensionnels. On peut remarquer que le passage de (20) à (21) est singulier pour les grandes valeurs de  $\gamma_1$  ou quand  $\text{ch}(\gamma_1 e^*)$  est éloigné de 1.

En développant la fonction  $\text{ch}$  et en utilisant le comportement asymptotique de  $p$  et  $\alpha$  dans l'espace transformé, en  $1/t$  et  $1/r$  dans l'espace réel, on déduit que l'approximation de condition limite de 6ème espèce est valable pour :

$$t \gg \frac{\rho c^* e^{*2}}{2\lambda^*} \text{ ou } r \gg e^*.$$

$\Psi_3$  est par définition une approximation de  $\Psi_2$ . Elle est utilisable quand :

$$\frac{\rho c^* p}{\lambda^*} \gg \alpha^2$$

ou dans l'espace réel :

$$\frac{\rho c^* e^{*2}}{2\lambda^*} \ll t \ll \frac{\rho c^*}{\lambda^*} r^2.$$

Cette gamme de temps rend souvent  $\Psi_3$  inutilisable.

Calcul de  $T(r, z, t)$  dans l'espace réel. Pour le calcul des solutions dans l'espace réel (de coordonnées  $r, z, t$ ), nous opérons tout d'abord une transformation inverse numérique de Laplace (voir ref. [3] pour une présentation de la méthode et ref. [4] pour des tests de précision) :

$$\phi(\alpha_n, z, t) = \frac{\ln(2)}{t} \left( \sum_{j=1}^{10} \Psi(\alpha_n, z, j \frac{\ln(2)}{t}) V_j \right). \quad (23)$$

Les valeurs de  $V_j$  sont données en Annexe.

On effectue ensuite une transformation inverse de Hankel :

$$T(r, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2J_0(\alpha_n r)}{R^{*2} J_0^2(\alpha_n R^*)} \phi(\alpha_n, z, t). \quad (24)$$

Cette série doit être tronquée pour les besoins du calcul. Numériquement nous utilisons une solution approchée de

$J_1(\alpha_n R^*) = 0$ , soit :

$$\alpha_0 = 0 \text{ et } \alpha_n R^* = n\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{3}{8(n\pi + (\pi/4))}. \quad (25)$$

$n$  entier variant de 1 à  $\infty$ .

Cette méthode est une extension de la méthode des quadripôles aux transferts de chaleur 2D et 3D (voir ref. [5]).

*Tracé des résultats aux temps 'moyens'.* La Fig. 3(a) montre l'évolution de température à différentes profondeurs ( $z = 1$ ,  $z = 0$  et  $z = -e^*$ ) au centre de la plaque (en  $r = 0$ ), pour des temps 'moyens' ( $t > \rho c^* e^{*2} / (2\lambda^*)$ ) pour les 3 calculs. Le calcul de la série (14) a été effectué avec 100 termes.

On constate une parfaite identité pour le cas exact et la condition à la limite de 6ème espèce. Par contre, la condition à la limite de 4ème espèce conduit à une erreur très importante. La Fig. 3(b) confirme ce résultat pour une température en  $r = 2b$ .

Le croisement des courbes  $T_1$  ou  $T_2$  en face arrière, avec  $T_1$  ou  $T_2$  en face avant, est dû à un effet bidimensionnel.

Les petites oscillations observées sur le tracé sont dues aux erreurs de troncature et à l'algorithme d'inversion. Elles ne sont pas reproductibles. Elles ne changent pas les conclusions.

*Tracé des résultats aux temps 'courts'.* La Fig. 4 montre les mêmes données que la Fig. 3(a), mais pour une échelle de temps beaucoup plus courte (de l'ordre de  $10^{-4}$ ), de façon à mettre en évidence la zone, très petite, dans laquelle l'approximation (16) n'est pas utilisable ( $t < \rho c^* e^{*2} / (2\lambda^*)$ ).

Pour éviter les phénomènes de Gibbs dû aux erreurs de troncature de la série (24), le calcul est effectué avec 100 termes de la série et un rayon  $R^*$  plus petit ( $R^* = (2/3)b^*$ ). Ceci est licite puisque les températures sont alors nulles pour  $r$  grand devant  $b^*$ .

De façon à étudier la précision des résultats tracés, on compare  $T_1(r = 0, z = -e^*, t)$  à la solution analytique obtenue dans le cas d'un mur semi-infini, dans le Tableau 1 :

$$T_\infty(z = -e^*, t) = \frac{1}{\sqrt{(\pi\lambda^*\rho c^*t)}}$$

A la fin du Tableau 1 ainsi que sur la Fig. 4, les valeurs de  $T_1(-e^*, t)$ ,  $T_2(0, t)$  et  $T_3(0, t)$  se confondent sur un même palier qui correspond à la valeur limite :  $1/\rho c^* e^* = 0.4762$ .

On peut constater que, dans le cas étudié, la précision est au moins de l'ordre du pour-cent.

*Comportement aux temps 'longs'.* Aux temps longs, du fait de l'excitation impulsionnelle, toutes les courbes  $T_1$ ,  $T_2$  et

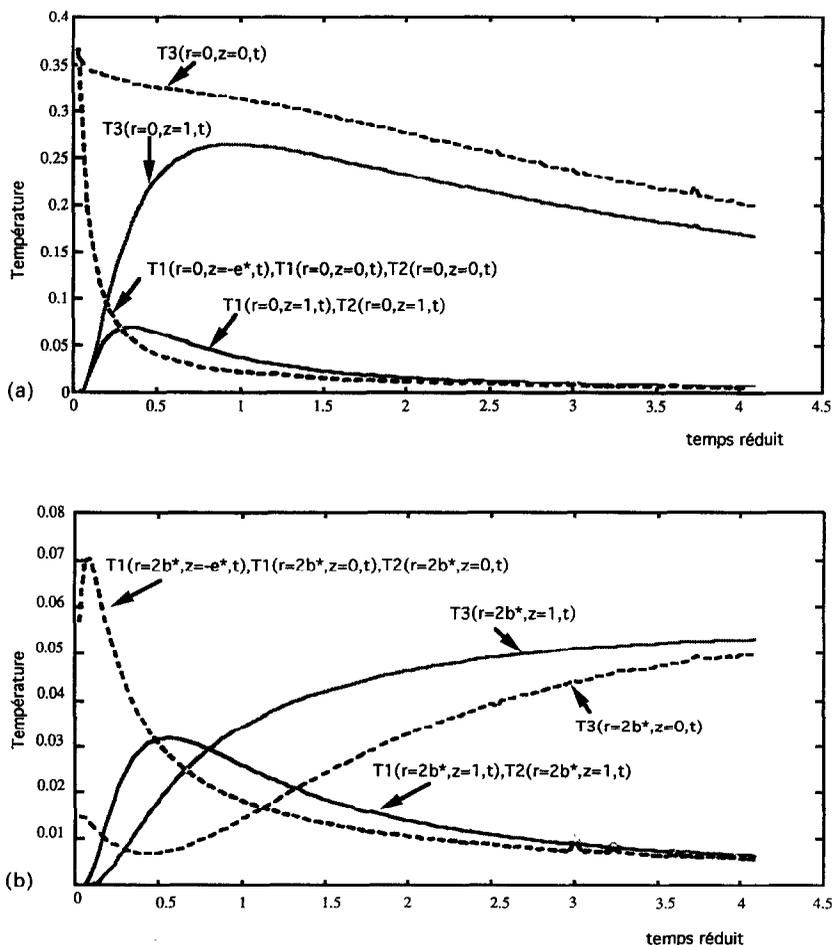


FIG. 3. Comparaison des températures aux temps 'moyens', en  $z = -e^*$ ,  $z = 0$ ,  $z = 1$  pour :  $T_1$  : Bicouche ;  $T_2$  : Conditions aux limites de 6ème espèce ;  $T_3$  : Conditions aux limites de 4ème espèce : (a) Températures en  $r = 0$  ; (b) Températures en  $r = 2b^*$ .

